Cálculo integral

→ Integral definido

76. (a) Calcule um valor aproximado do integral definido

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

utilizando uma decomposição do intervalo $[0,1]$ em 6 subintervalos de igual amplitude e uma soma de Riemann em que a escolha de cada ponto c_i no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, 6$, coincida com:

   (i) O ponto onde $f(x) = x^2$ atinge o seu valor mínimo em $[x_{i-1}, x_i]$.

   (ii) O ponto onde $f(x) = x^2$ atinge o seu valor máximo em $[x_{i-1}, x_i]$.

   (iii) O ponto médio do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

(b) Calcule por definição o valor do integral, considerando uma decomposição do intervalo de integração em n subintervalos de igual amplitude, e uma soma de Riemann em que $c_i = x_i$ em cada subintervalo da decomposição.

77. Determine por definição os seguintes integrais definidos. Utilize para o efeito uma decomposição do intervalo de integração em n subintervalos de igual amplitude e uma soma de Riemann em que a escolha dos pontos c_i recaia, em cada alínea, num dos extremos de cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

(a) $\displaystyle\int_1^2 x\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^3 16 - x^2\,dx$

(c) $\displaystyle\int_2^3 \pi(x^2-4)\,dx$ (d) $\displaystyle\int_0^b x^3\,dx\,, \quad b \geq 0$

78. Calcule os integrais definidos.

(a) $\displaystyle\int_{-2}^3 |x|\,dx$ (b) $\displaystyle\int_1^5 |x-2|\,dx$ (c) $\displaystyle\int_1^2 x\ln x\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_0^1 \arctan x\,dx$ (f) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x\sqrt{4-x^2}\,dx$ (h) $\displaystyle\int_0^1 x\,e^{x^2}\,dx$ (i) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

(j) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^4 - x^3 + 2x\,dx$ (l) $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx$ (m) $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^3}{x-1}\,dx$

79. Verifique que:

    (a) $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx \;\leq\; \int_0^1 x\,dx\,.$

    (b) $\displaystyle\int_1^2 x^2\,dx \;\geq\; \int_1^2 x\,dx\,.$

80. Calcule o valor médio da função $f(x) = x^2$ no intervalo $[1, 3]$ e determine o ponto onde ele ocorre.

81. Calcule o valor médio da função $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ no intervalo $[1, e]$.

82. Mostre que

$$\frac{1}{\sqrt[4]{e}} \;\leq\; \int_0^2 e^{\,x^2-x}\,dx \;\leq\; 2\,e^2\,.$$

83. (a) Verifique que a função $f(x) = \arctan x - x$ é decrescente em todo o seu domínio.

    (b) Mostre, sem calcular o integral definido, que

$$\frac{\pi-4}{4} \;<\; \int_0^1 f(x)\,dx \;<\; 0\,.$$

84. Calcule integrando por substituição os integrais definidos.

    (a) $\displaystyle\int_4^9 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{1-4x^2}\,dx$

    (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x+e^{2x}}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_{-2}^0 2-\sqrt{4-(x+2)^2}\,dx$

85. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = 3.$

    (a) Calcule o valor médio de f em $[0, 2]$.

    (b) Calcule $\displaystyle\int_0^2 f(2-t)\,dt.$

86. Seja f uma função integrável no intervalo $[-a, a]$. Mostre que:

    (a) Se f é uma função ímpar em $[-a, a]$, então $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$

    (b) Se f é uma função par em $[-a, a]$, então $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$

    (c) Indique uma função par e uma função ímpar para interpretar geometricamente os resultados anteriores.

    (d) Verifique se alguma das alíneas do exercício 78, na página 14, pode simplificar-se por meio das propriedades apresentadas nas alíneas anteriores.

87. Sejam f e g duas funções contínuas em $\mathbb{R}$. Admita que f é uma função ímpar e que

$$\int_{-1}^{4} f(x)\,dx = 2 \qquad \text{e} \qquad \int_{1}^{4} g(x)\,dx = 3\,.$$

(a) Justifique se as seguintes proposições são verdadeiras ou falsas.

(i) $\displaystyle\int_{1}^{4} f(x)\,dx = 2.$

(ii) $\displaystyle\int_{1}^{4} f(x) - 2\,g(x)\,dx = -4.$

(iii) $g(x) \leq f(x)\,,\quad$ para todo o $x \in [1,4]$.

88. Seja f uma função que tem o mesmo valor em $x = a$ e $x = b$ e cuja derivada f' é uma função contínua. Nestas condições, calcule o integral definido $\displaystyle\int_{a}^{b} f'(x)\,dx\,.$

89. (a) Admita que f é uma função contínua e mostre que

$$\int_{a}^{b} f(x+c)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx\,.$$

(b) Qual o significado geométrico do resultado anterior.

→ Aplicações do integral definido

90. Represente graficamente a região plana limitada por cada conjunto de curvas e determine o valor da sua área.

(a) $y = 4 - x^2\,,\quad y = 0$

(b) $y = x^3\,,\quad y = -x^2 + 2\,,\quad x = 0\,,\quad x = 1$

(c) $y = 4 - x^2\,,\quad y = x^2 - 1$

(d) $y = x^2\,,\quad y = \sqrt{x}$

(e) $y^2 = 4x\,,\quad y = 2x - 4$

(f) $y = \dfrac{x^2}{3}\,,\quad y = \dfrac{9-x}{2}\,,\quad x = 5\,,\quad y = 0$

91. Calcule a área da região plana definida por cada um dos seguintes conjuntos.

(a) $A = \{\,(x,y)\,:\,-2 \leq x \leq -y^2 - 1\,\}$

(b) $B = \{\,(x,y)\,:\,y \leq x^2 \ \wedge\ x^2 + y^2 \leq 2 \ \wedge\ y \geq x - \sqrt{2} \ \wedge\ x \geq 0\,\}$

(c) $C = \{\,(x,y)\,:\,y \geq -1 \ \wedge\ y \leq x^3 \ \wedge\ y \leq 2 - x\,\}$

(d) $D = \{\,(x,y)\,:\,x^2 + y^2 \leq 2 \ \wedge\ x \geq y^2\,\}$

92. Determine a área do triângulo de vértices nos pontos $A(2,0)$, $B(0,2)$ e $C(3,3)$.

93. (a) Verifique que a região plana limitada por uma elipse de semi-eixos a e b tem área igual a πab.

    (b) Deduza a expressão da área de um círculo de raio r.

94. Esboce a região plana R que é limitada por cada conjunto de curvas e determine o volume do sólido gerado pela rotação de R em torno do eixo indicado.

    (a) $y = e^x, \quad y = 0, \quad x = 0 \quad \text{e} \quad x = 1$ em torno do eixo das abcissas.

    (b) $y = \sin x, \quad y = 0, \quad x = 0 \quad \text{e} \quad x = \pi$ em torno do eixo das abcissas.

    (c) $y = \ln x, \quad y = 0, \quad x = 1 \quad \text{e} \quad x = e$ em torno do eixo das ordenadas.

    (d) $y = x, \quad y = 2 \quad \text{e} \quad x = 0$ em torno do eixo das ordenadas.

    (e) $y = \dfrac{x^2}{2} + 2, \quad x = 0 \quad \text{e} \quad y = 3 - x^2$ em torno do eixo das abcissas.

    (f) $y = x, \quad y = 1 \quad \text{e} \quad x = 0$ em torno:

        (i) Do eixo das abcissas.

        (ii) Do eixo das ordenadas.

    (g) $x \geq 0, \quad y = 2 - x \quad \text{e} \quad y = x^2$ em torno:

        (i) Do eixo das abcissas.

        (ii) Do eixo das ordenadas.

95. Mostre que o volume de uma esfera de raio r é igual a $4\pi r^3/3$.

96. Calcule, por dois processos distintos, o comprimento da curva definida por $f(x) = x$ do ponto $A(0,0)$ ao ponto $B(2,2)$.

97. Determine o comprimento da curva definida por $f(x) = \ln(\cos x)$ em $[0, \pi/4]$.

98. Determine o comprimento da curva definida por $f(x) = \cosh x$ no intervalo $[0, \ln 2]$.

99. Determine o comprimento da curva definida por $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - 10$ do ponto $A(8,2)$ ao ponto $B(27,17)$.

100. Verifique que $2\pi r$ é o perímetro de uma circunferência de raio r.

101. (a) Determine a curva que contém o ponto $A(1,0)$ e cujo comprimento entre os pontos de abcissa $x = 1$ e $x = 2$ é $c = \displaystyle\int_1^2 \sqrt{1 + 1/x^2}\, dx$.

     (b) Calcule o valor de c.

102. Considere a região plana A, no primeiro quadrante, que é limitada por $y_1 = \cos x$ e $y_2 = 1/2$.

   (a) Calcule o valor da área de A.

   (b) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação da região A em torno do eixo das abcissas.

   (c) Apresente uma expressão que permita calcular o perímetro da região A.

103. (a) Represente a região plana limitada por $y = \cosh x$, $x = -\ln 2$, $x = \ln 2$ e $y = 0$ (considere $\ln 2 \approx 0.69$).

   (b) Calcule a área da região.

   (c) Calcule o comprimento da fronteira da região.

104. (a) Calcule o valor da área da região plana limitada por $x = 0$, $x = \pi/2$, $y = \cos x$ e $y = \sin x$.

   (b) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação da região em torno do eixo das abcissas.

   (c) Explique por que motivo bastaria ter usado o intervalo $[0, \pi/4]$ para calcular a área e o volume.

105. Considere a região A limitada pelas curvas $y = e^x$, $y = -x + 1$ e $x = 1$.

   (a) Determine o valor da área da região A.

   (b) Determine o volume do sólido gerado pela rotação de A em torno do eixo das abcissas.

106. Considere a região plana, designada por B, definida pelas condições $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$ e $y \geq 1/2$.

   (a) Determine o volume do sólido gerado pela rotação de B em torno do eixo das ordenadas.

   (b) Calcule o valor do perímetro da região B.

107. Considere a região plana, designada por A, limitada por $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 1$ e $x = e$.

   (a) Represente a região A e determine o valor da sua área.

   (b) Determine o volume do sólido gerado pela rotação de A em torno do eixo das ordenadas.

   (c) Que interpretação geométrica pode dar ao valor do integral $\displaystyle\int_1^e \sqrt{1 + 1/x^2}\, dx$.

108. Considere o integral $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$.

(a) Qual o significado geométrico do integral definido.

(b) Determine o seu valor sem calcular o integral definido.

109. Considere a região plana, designada por R, definida pelas condições $y \leq x+2$, $y \geq x^2$ e $y \leq -x+2$.

(a) Represente a região R e determine o valor da sua área.

(b) Determine o volume do sólido gerado pela rotação de R em torno do eixo das abcissas.

(c) Determine o volume do sólido gerado pela rotação de R em torno do eixo das ordenadas.

(d) Sabendo que o perímetro total da fronteira de R é $2\sqrt{2}+\sqrt{5}+[\ln(\sqrt{5}+2)]/2$, calcule o valor do perímetro que corresponde à curva $y = x^2$.

→ **Integral indefinido**

110. Determine $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$ para cada função f.

(a) $f(t) = \dfrac{3t}{t^2+1}$ com $t \in [0,1]$

(b) $f(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,1[\\ t^2-1, & t \geq 1 \end{cases}$

(c) $f(t) = \begin{cases} t^2, & t \in [-1,1] \\ 2, & t > 1 \end{cases}$

111. Calcule $F'(x)$ para cada função.

(a) $F(x) = \displaystyle\int_{-2}^{x} \frac{5t}{t^2+1}\, dt$

(b) $F(x) = \displaystyle\int_{1}^{x^2+1} t\, e^{\sqrt{t-1}}\, dt$

(c) $F(x) = x^3 \displaystyle\int_{x}^{1} e^{-t^2}\, dt$

(d) $F(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{\sqrt{x}} \cos(t^2)\, dt$

112. Considere a a função

$$f(x) = 3 + \int_0^x \frac{1+\sin(2t)}{2+t^2}\,dt\,.$$

Determine, sem calcular o integral, o polinómio $p(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ que satisfaz $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$ e $p''(0) = f''(0)$.

113. Mostre que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \int_0^x e^{-t}\,dt}{e^{x^3}-1} = 1\,.$

114. Determine os extremos da função $f(x) = \displaystyle\int_0^x t\,(e^{\,t} - e)\,dt\,.$

115. (a) Mostre por meio de uma mudança de variável adequada que

$$\int_1^a \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{1/a}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

para todo o $a > 0$.

(b) Utilize a alínea (a) para deduzir que

$$\arctan x + \operatorname{arccotg} x = \pi/2$$

para todo o $x > 0$.

(c) Como pode interpretar geometricamente o resultado contido na alínea (a).

116. Mostre que a função $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^3} h(t)\,dt$ é ímpar se a função h for par.

117. Considere uma função f que é contínua e periódica de período p. Mostre que

$$F(x) = \int_x^{x+p} f(t)\,dt$$

é uma função constante.

118. Determine a função contínua f que satisfaz a condição $f(x) = 2 + \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt.$

→ Integrais impróprios - integrais em intervalos não limitados

119. Calcule quando possível o valor de cada integral impróprio.

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{(4-x)^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \sin x\,dx$ (c) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-2x}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^3}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+6x+12}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ (h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{3|x|}\,dx$ (i) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x\,e^{-x}\,dx$

120. Determine os valores de $k \in \mathbb{R}$ que tornam convergente o integral $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-kx}\,dx$.

121. Considere

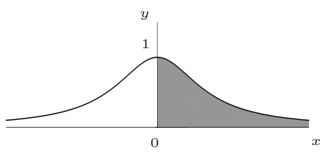
$$f(x) = \begin{cases} m\,x^2, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

e determine $m \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1\,.$$

122. Apresente um esboço da função $f(x) = x\,e^{-x}$ e mostre que a área da região no semi-plano $x \geq 0$, que é limitada superiormente pelo gráfico de f e inferiormente pelo eixo das abcissas, é finita e igual a 1.

123. Na figura está representado o gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.



Verifique que a área da região a sombreado é finita.

→ Integrais impróprios - integrais de funções não limitadas

124. Calcule quando possível o valor de cada integral impróprio.

(a) $\displaystyle\int_0^1 x \ln x \, dx$ (b) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} \, dx$ (c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2} \, dx$

(d) $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \, dx$ (e) $\displaystyle\int_{-8}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \, dx$ (f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \, dx$

125. Determine os valores do parâmetro α que tornam convergente o integral

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} \, dx\,, \qquad \text{onde } a < b\,.$$

→ Métodos numéricos de integração

126. Determine uma aproximação do integral definido

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2} \, dx$$

(a) pela regra dos trapézios composta com $n = 3$,

(b) pela regra de Simpson composta com $n = 4$.

127. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & x \in [0, 1/2] \\ 1-x\,, & x \in \,]1/2, 1] \end{cases}$$

e determine uma aproximação do integral definido de f no intervalo [0,1]:

(a) Pela regra dos trapézios.

(b) Pela regra de Simpson.

(c) Comente os resultados que obteve.

128. Calcule uma aproximação do integral definido

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

e apresente uma estimativa do erro cometido

(a) pela regra dos trapézios simples,

(b) e pela regra de Simpson simples.

129. (a) Considere $n = 4$ e determine uma aproximação de

$$\int_0^2 x^3\,dx$$

(i) pela regra dos trapézios composta,

(ii) pela regra de Simpson composta.

(b) Para cada aproximação, determine um majorante para o erro cometido.

130. Considere o integral definido

$$J = \int_0^1 e^x \cos x\,dx\,.$$

(a) Qual deve ser o menor número de subintervalos, para que a aplicação da regra dos trapézios composta, determine uma aproximação de J com erro absoluto inferior a 0.1.

(b) Determine um valor aproximado de J de acordo com a alínea anterior.

131. Considere o integral definido

$$J = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx\,.$$

(a) Qual deve ser o menor número de subintervalos, para que a aplicação da regra dos trapézios composta, permita determinar uma aproximação de J com erro absoluto inferior a 0.01.

(b) Qual deve ser o menor número de subintervalos, para que a aplicação da regra de Simpson composta, determine uma aproximação de J com erro absoluto inferior a 0.001.

(c) Determine um valor aproximado de J de acordo com cada alínea anterior.