Séries numéricas

132. Utilize a definição para determinar a natureza de cada série. Indique a soma no caso da série ser convergente.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n-1}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{2}{n}} - 2^{\frac{2}{n+1}}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{7}{6^{n-1}}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right)$ (l) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

133. (a) Determine a natureza das séries.

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{3^n}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2}$ (iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{10^{n+2}}$

(b) O que pode concluir sobre a natureza das séries.

(i) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4}{3^n}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{3^{n+1}}{10^{n+2}}\right)$ (iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{n}{2}\right)$

134. Uma bola salta ao longo de uma rua. No fim de cada salto a bola percorre uma distância que é igual a 4/5 da distância que percorreu no salto anterior. Calcule uma aproximação para a distância percorrida pela bola até parar, sabendo que no fim do primeiro salto a bola deslocou-se um metro do ponto de partida.

135. A extremidade de um pêndulo percorre um arco de 24 cm de comprimento no seu primeiro movimento. Se em cada movimento sucessivo o comprimento do arco é aproximadamente igual a 5/6 do comprimento anterior, obtenha uma aproximação da distância total percorrida pelo pêndulo até ao repouso.

136. Considere $|a| < 1$ e determine a soma das seguintes séries numéricas.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^{2n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^{2n+1}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^n$

137. Utilize a teoria de séries para determinar uma representação fraccionária de cada número racional.

(a) $a = 4.44...$ (b) $b = 0.2121...$ (c) $c = 0.234234...$

138. Determine a natureza das séries de termos positivos.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{7}{n}\right)^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{\log n}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(\pi/12)}{n^2}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{2n^3+3}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)!}{e^{3n}}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log n}{\sqrt[4]{n^5}}$ (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2(1/2^n)$

(j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5+n+\sin n}$ (l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan n}{n^5}$ (m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+1}$

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n\sqrt[n]{e}}$ (o) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^n}$ (p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,2^n}$

(q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^n}$ (r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,2^n}{n^n}$

139. Utilize o critério do integral para mostrar que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

é convergente para todo $s > 1$.

140. Utilize o critério do integral para determinar a natureza da série

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$$

141. Use a teoria de séries para determinar o limite de cada sucessão.

(a) $a_n = \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ (b) $b_n = \dfrac{e^n}{n!}$ (c) $c_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

142. Verifique que:

   (a) Se $a_n > 0$ e a série $\sum a_n$ é convergente, então a série $\sum 1/a_n$ é divergente.

   (b) Se a série $\sum |a_n|$ é convergente, então a série $\sum {a_n}^2$ também é convergente.

143. Determine a natureza das séries alternadas.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{1}{n^{2/3}}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{1}{\log(n+1)}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{1}{n^2}$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\,\frac{n}{\log n}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{1}{n}$

   (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\,\frac{e^n}{n^4}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\,\frac{n}{2^n}$

144. Verifique que as séries são convergentes e determine um majorante para o erro cometido, se a soma dos quatro primeiros termos é a aproximação da série.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{1}{n}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{1}{(2n-1)^2}$

145. Determine quais os valores de $x \in \mathbb{R}$ que tornam convergentes as seguintes séries.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$