

Capítulo 5

Séries numéricas

5.1 Sucessões numéricas

Sucessão de números reais é toda a aplicação do conjunto dos números naturais no conjunto dos números reais, representada do seguinte modo

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto a(n) = a_n \end{aligned} .$$

É costume indicar o termo geral da sucessão por a_n e a sucessão por (a_n) . Os números reais $a_1, a_2, \dots$ representam os termos da sucessão.

Exemplo 5.1

Considere por exemplo as sucessões de termo geral

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Sobre a monotonia de uma sucessão (a_n) tem-se:

- (i) A sucessão é crescente em sentido lato se

$$a_{n+1} - a_n \geq 0$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

- (ii) A sucessão é decrescente em sentido lato se

$$a_{n+1} - a_n \leq 0$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Séries numéricas

Exemplo 5.2

A sucessão de termo geral

$$a_n = \frac{1}{n}$$

é uma sucessão estritamente decrescente. De facto, tem-se

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{n^2 + n} < 0$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Uma sucessão numérica (a_n) é limitada se existe um número $L \in \mathbb{R}^+$ tal que $|a_n| < L$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Se a condição anterior não é satisfeita, então a sucessão (a_n) diz-se não limitada.

Exemplo 5.3

A sucessão de termo geral

$$a_n = \frac{1}{n}$$

é uma sucessão limitada. Para confirmar esta afirmação, basta escolher por exemplo o número $L = 2$.

Uma sucessão (a_n) tem por limite o número real a , isto é,

$$\lim_n a_n = a,$$

se e só se para toda a vizinhança do número a , $V_\epsilon(a)$ ($\epsilon > 0$), existe (uma ordem) $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_n \in V_\epsilon(a) \quad \text{sempre que} \quad n \geq p.$$

Do ponto de vista formal, escreve-se

$$\lim_n a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N} : \forall n \geq p \Rightarrow a_n \in V_\epsilon(a).$$

Se $\lim_n a_n$ existe e é finito, então a sucessão (a_n) é convergente. Caso contrário, a sucessão é divergente.

Exemplo 5.4

Ambas as sucessões apresentadas no exemplo 5.1 são convergentes. Tem-se

$$\lim_n \frac{1}{n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Os próximos resultados estabelecem algumas ligações entre os conceitos recordados.

Teorema 5.1

O limite de uma sucessão convergente é único.

Teorema 5.2

Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.

Exercício 5.1

Verifique que as seguintes afirmações são verdadeiras.

(a) A sucessão $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ é convergente.

(b) A sucessão $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ é divergente.

5.1.1 Progressão aritmética

A sucessão (a_n) é uma progressão aritmética de razão $r \in \mathbb{R}$ se

$$a_{n+1} = a_n + r \quad (\text{isto é, } a_{n+1} - a_n = r)$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$. Se $r = 0$, então todos os termos da sucessão (a_n) são iguais ao primeiro termo a_1 . O termo geral da progressão aritmética é

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

e a soma dos k primeiros termos de (a_n) é

$$s_k = k \frac{(a_1 + a_k)}{2}.$$

Esta fórmula permite uma interpretação mais geral. Mostra-se que a soma de k termos consecutivos da sucessão é dada por

$$k \frac{(a_{i+1} + a_{i+k})}{2}$$

qualquer que seja $i \in \mathbb{N}_0$.

Exemplo 5.5

A sucessão de termo geral

$$a_n = 2n + 3 \quad (5, 7, 9, \dots)$$

é uma progressão aritmética de razão $r = 2$.

5.1.2 Progressão geométrica

A sucessão (a_n) é uma progressão geométrica de razão $r \in \mathbb{R}$ se

$$a_{n+1} = a_n r \quad \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \text{ quando } r \neq 0 \right)$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$. Quando $r = 0$ os termos da sucessão (a_n) são todos iguais a zero. O termo geral da progressão geométrica é

$$a_n = a_1 r^{n-1}.$$

Quando $r = 1$, a soma dos k primeiros termos da progressão é $s_k = k a_1$. Se $r \neq 1$, então a soma dos k primeiros termos da progressão geométrica é igual a

$$s_k = a_1 \frac{(1 - r^k)}{1 - r}.$$

Mais geralmente, a expressão

$$a_{i+1} \frac{(1 - r^k)}{1 - r},$$

qualquer que seja $i \in \mathbb{N}_0$, permite obter a soma de k termos sucessivos da progressão geométrica (a_n) , de razão $r \neq 1$.

Exemplo 5.6

A sucessão de termo geral

$$a_n = 2^{-n} \quad (1/2, 1/4, 1/8, \dots)$$

é uma progressão geométrica de razão $r = 1/2$.

Exercício 5.2

Verifique que:

Se (a_n) é uma progressão geométrica de razão $r > 0$ (com $r \neq 1$) tal que $a_1 > 0$, então a sucessão de termo geral $b_n = \log_r a_n$ é uma progressão aritmética de razão $r = 1$.

5.2 Séries numéricas

Considere o seguinte problema¹:

Imagine um atleta que corre a velocidade constante e que demora m minutos a percorrer metade do percurso total de uma determinada prova. O tempo que o atleta demora a concluir a prova pode ser apresentado da seguinte forma

$$m + \frac{m}{2} + \frac{m}{4} + \frac{m}{8} + \cdots + \frac{m}{2^n} + \cdots .$$

Parece natural associar ao tempo total da prova o valor $2m$, isto é, considerar que

$$m + \frac{m}{2} + \frac{m}{4} + \frac{m}{8} + \cdots + \frac{m}{2^n} + \cdots = 2m .$$

Como obter este resultado? E ainda, como efectuar a soma de um “número infinito” de parcelas? Apresentamos a resposta para estas perguntas nas próximas secções.

5.2.1 Definição e natureza de uma série

Definição 5.1

Seja (a_n) uma sucessão de números reais. À expressão matemática

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

representada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

chama-se *série numérica de termo geral* a_n .

A cada série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

está associada uma outra sucessão numérica (além de (a_n)), que é representada por (s_n) e é designada por sucessão das somas parciais. A sucessão (s_n) é definida do seguinte modo

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 , \\ s_2 &= a_1 + a_2 , \\ &\vdots \\ s_k &= a_1 + \cdots + a_k = \sum_{n=1}^k a_n , \\ &\vdots \end{aligned}$$

¹Adaptação do paradoxo de Aquiles e da tartaruga (proposto por Zenão), apresentado no livro “Calculus” de Tom M. Apostol - citado na bibliografia da disciplina.

Definição 5.2

A série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

diz-se *convergente* se e só se a sucessão das somas parciais associada é convergente, isto é, se existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_k s_k = s$. Ao número s chama-se *soma da série* e escreve-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Definição 5.3

A série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

diz-se *divergente* e não tem soma se e só se a sucessão das somas parciais é divergente.

Assim, para uma série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

podemos pensar em atingir os seguintes objectivos:

- Determinar a natureza da série, isto é, averiguar se é convergente ou divergente.
- Calcular a soma da série quando esta é convergente.

O primeiro objectivo é em geral atingível. O mesmo já não acontece para o segundo objectivo. De seguida apresentamos duas séries numéricas para as quais é sempre possível determinar a soma (quando convergentes).

Observação 5.1

Observe-se que a natureza de uma série não depende de um número finito de termos.

5.2.2 Série geométrica

Uma série numérica $\sum a_n$ é geométrica de razão $r \in \mathbb{R}$ se a sucessão (a_n) é uma progressão geométrica de razão r .

Podemos determinar a natureza de uma série geométrica e, quando convergente, determinar qual a sua soma.

Uma série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

de razão $r \in \mathbb{R}$ é convergente se $|r| < 1$ e a sua soma é

$$s = \frac{a_1}{1-r}.$$

Se $|r| \geq 1$ a série é divergente e não tem valor.

Verificação: Seja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

uma série geométrica de razão $r \in \mathbb{R}$. Distinguímos o caso $r = 1$ do caso $r \neq 1$. Se (a_n) é uma progressão geométrica de razão $r = 1$ então $a_n = a_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (assumimos $a_1 \neq 0$). A sucessão das somas parciais associada tem termo geral $s_k = k a_1$. A série geométrica é por isso divergente. Se (a_n) é uma progressão geométrica de razão $r \neq 1$, então o termo geral da sucessão das somas parciais é

$$\begin{aligned} s_k &= a_1 + \cdots + a_k \\ &= \sum_{n=1}^k a_n \\ &= a_1 \frac{1-r^k}{1-r} \\ &= \frac{a_1}{1-r} - \frac{a_1}{1-r} r^k. \end{aligned}$$

Como

$$\lim_k r^k = \begin{cases} \nexists & \text{se } r \leq -1, \\ 0 & \text{se } r \in]-1, 1[, \\ +\infty & \text{se } r > 1, \end{cases}$$

conclui-se que $\lim_k s_k$ só existe e é finito igual a $a_1/(1-r)$ se $|r| < 1$. Ou seja, se $|r| < 1$ a série geométrica é convergente e tem soma $a_1/(1-r)$. Se $|r| \geq 1$ a série é divergente.

Exemplo 5.7

Considere a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{2^n} = 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8} + \cdots$$

Observa-se que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} = r, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Conclui-se que a série é uma série geométrica convergente de soma

$$s = \frac{a_0}{1-r} = 10.$$

Ou seja, mostramos que

$$5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8} + \cdots = 10.$$

Convém observar que a representação de uma série não é única. A série geométrica do exemplo anterior pode, por exemplo, reescrever-se da seguinte forma

$$5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^{n-1}}.$$

Exemplo 5.8

O problema proposto no início da secção diz respeito à série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{2^{n-1}}$$

que é uma série geométrica convergente de soma $s = 2m$.

5.2.3 Série telescópica

Uma série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

diz-se telescópica (ou de Mengoli) se

$$a_n = u_n - u_{n+p}, \quad \text{para algum } p \in \mathbb{N},$$

isto é, se o termo geral da série se pode escrever como a diferença de dois termos, não necessariamente consecutivos, de uma outra sucessão (u_n) .

Tal como para a série geométrica, existem resultados globais para a determinação da natureza de uma série telescópica e, quando convergente, da sua soma.

Se $\lim_n u_n$ existe e é finito, então a série telescópica é convergente e tem soma

$$s = u_1 + \cdots + u_p - p \lim_n u_n.$$

Se $\lim_n u_n$ não existe ou não é finito, então a série é divergente e não tem soma.

Para uma série telescópica com $p = 2$, a sucessão das somas parciais associada à série tem termo geral

$$\begin{aligned} s_k &= \sum_{n=1}^k a_n = \sum_{n=1}^k (u_n - u_{n+2}) \\ &= (u_1 - u_3) + (u_2 - u_4) + (u_3 - u_5) + (u_4 - u_6) + \cdots \\ &\quad + (u_{k-3} - u_{k-1}) + (u_{k-2} - u_k) + (u_{k-1} - u_{k+1}) + (u_k - u_{k+2}) \\ &= u_1 + u_2 - (u_{k+1} + u_{k+2}). \end{aligned}$$

Logo, para p genérico, podemos concluir que

$$s_k = \underbrace{u_1 + \cdots + u_p}_{p \text{ primeiros termos}} - (u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+p}).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_k s_k &= u_1 + \cdots + u_p - \lim_k (u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+p}) \\ &= u_1 + \cdots + u_p - p \lim_k u_k. \end{aligned}$$

Ou seja, uma série telescópica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n+p})$$

só é convergente se $\lim_n u_n$ existir e for finito. A sua soma é $u_1 + \cdots + u_p - p \lim_n u_n$. A série telescópica é divergente se $\lim_n u_n$ não existir ou não for finito.

Exemplo 5.9

Considere a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}.$$

Observa-se que

$$a_n = \frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = u_n - u_{n+1}, \quad \text{onde } u_n = \frac{1}{n}.$$

A série é telescópica e é convergente porque $\lim_n u_n$ existe e é finito. A sua soma é

$$s = u_1 - \lim_n u_n = u_1 = 1.$$

Ou seja, tem-se

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots = 1.$$

5.2.4 Série de Dirichlet

Uma série numérica da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

é uma série de Dirichlet.

Chama-se série harmónica à série de Dirichlet com $\alpha = 1$.

Mostra-se que a série de Dirichlet é:

- convergente se $\alpha > 1$,
- e divergente se $\alpha \leq 1$ (situação que é mais ou menos clara quando $\alpha < 0$).

Em particular, saliente-se que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$$

é convergente enquanto que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

é uma série divergente.

5.2.5 Propriedades das séries numéricas

Antes de mais observe que, se

$$b_n = a_{p+n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

então a análise da natureza da série

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n \tag{5.1}$$

é equivalente à análise da natureza da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{5.2}$$

De facto, (5.1) e (5.2) são representações distintas da mesma série numérica. Por este motivo, uma série genérica é sempre representada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Também pelo mesmo motivo é costume representar uma série apenas por

$$\sum a_n.$$

Observação 5.2

Duas séries numéricas $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são idênticas se $a_n = b_n$ para todo o n .

Teorema 5.3

Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são duas séries convergentes de soma $\underline{a}$ e $\underline{b}$ respectivamente, então:

(i) A série soma $\sum (a_n + b_n)$ é convergente e tem soma $a + b$, isto é,

$$\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n.$$

(ii) A série $\sum (\alpha a_n)$ é convergente para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$ e tem soma αa , isto é,

$$\sum (\alpha a_n) = \alpha \sum a_n.$$

Corolário 5.1

O teorema anterior permite deduzir que:

(i) Se $\sum a_n$ é convergente e $\sum b_n$ é divergente, então a série soma

$$\sum (a_n + b_n)$$

é divergente.

(ii) Nada se pode concluir sobre a natureza da série

$$\sum (a_n + b_n)$$

quando $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são séries divergentes.

Demonstração - (do corolário)

Ponto (i):

Por hipótese tem-se que $\sum a_n$ é convergente e $\sum b_n$ é divergente. Suponhamos então que $\sum (a_n + b_n)$ é convergente. Porque $\sum a_n$ é convergente também é convergente a série $\sum (-a_n)$. Daqui resulta que a série $\sum b_n$ também tem de ser convergente pois $\sum b_n = \sum (a_n + b_n + (-a_n))$, facto que contradiz a hipótese inicial. Ou seja, conclui-se que a série $\sum (a_n + b_n)$ tem de ser divergente.

Ponto (ii):

A demonstração deste ponto consiste na apresentação de dois exemplos.

1) As séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ com $a_n = b_n = 1$ são divergentes. O mesmo acontece para a série soma $\sum (a_n + b_n) = \sum 2$.

2) As séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ com $a_n = 1$ e $b_n = -1$ são divergentes e no entanto a série $\sum (a_n + b_n)$ é convergente. ■

5.2.6 Condição necessária de convergência**Teorema 5.4** (condição necessária de convergência)

Se $\sum a_n$ é uma série convergente, então $\lim_n a_n = 0$.

Demonstração - Considere a série convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

e seja

$$s_k = \sum_{n=1}^k a_n$$

o termo geral da sucessão das somas parciais associada à série. Note que $a_k = s_k - s_{k-1}$.

Porque a série é convergente, existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_k s_k = s$. Logo,

$$\lim_k a_k = \lim_k (s_k - s_{k-1}) = s - s = 0.$$

■

A condição enunciada no teorema anterior não é uma condição suficiente. Por isso, na prática, acaba por não ser muito útil na determinação da natureza de uma série. Recorde por exemplo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

é uma série divergente e que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

é uma série convergente. No entanto, tem-se

$$\lim_n \frac{1}{n} = \lim_n \frac{1}{n^2} = 0.$$

O seguinte corolário é claramente mais importante do ponto de vista prático.

Corolário 5.2

Se $\lim_n a_n \neq 0$ ou não existe então a série $\sum a_n$ é divergente.

Exemplo 5.10

A série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n}$$

é uma série divergente porque

$$\lim_n \frac{2n+1}{n} = 2 \neq 0.$$

5.2.7 Séries de termos não negativos

Os resultados que apresentamos nesta secção são válidos para séries numéricas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{onde} \quad a_n \geq 0 \quad \text{para todo o} \quad n \geq 1.$$

Nestes casos, a sucessão das somas parciais é sempre uma sucessão crescente.

Critério do integral

O estudo de integrais impróprios em intervalos não limitados (cuja função integranda é contínua e limitada no intervalo de integração) permite, em certas ocasiões, determinar a natureza de uma série. O próximo resultado permite a obtenção de tais conclusões.

Teorema 5.5 (critério do integral)

Se $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, que é em simultâneo decrescente e positiva, então a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

e o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx$$

têm a mesma natureza.

Observação 5.3

O critério do integral é que está na base do estudo da natureza da série de Dirichlet.

Exemplo 5.11

Considere a série Harmónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad (\text{série de Dirichlet com } \alpha = 1).$$

Considere a função

$$\begin{aligned} f : [1, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

e observe que esta é contínua, decrescente e positiva. Como o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$$

é divergente, podemos concluir que a série harmónica também é divergente.

Critério da raiz

Teorema 5.6 (critério da raiz (ou critério de Cauchy))

Considere a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

de termos não negativos e seja

$$\lambda = \lim_n \sqrt[n]{a_n}.$$

Nestas condições, são válidas as seguintes conclusões:

- a) A série numérica é convergente se $\lambda < 1$.
- b) A série numérica é divergente se $\lambda > 1$.
- c) Nada se pode concluir sobre a natureza da série numérica se $\lambda = 1$.

Observação 5.4

Alguns limites que dão muito jeito na aplicação deste último critério são:

- $\lim_n \sqrt[n]{a} = 1$ sempre que $a > 0$.
- $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$.
- $\lim_n \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

Critério da razão

Teorema 5.7 (critério da razão (ou critério de D'Alembert))

Considere a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{onde } a_n > 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

e seja

$$\lambda = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Nestas condições, são válidas as seguintes conclusões:

- a) A série numérica é convergente se $\lambda < 1$.
- b) A série numérica é divergente se $\lambda > 1$.
- c) Nada se pode concluir sobre a natureza da série numérica se $\lambda = 1$.

Exemplo 5.12

(a) Considere a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}.$$

Aplicando o critério da raiz, obtém-se

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} \\ &= \frac{\lim_n \sqrt[n]{2^n}}{\lim_n \sqrt[n]{n^2}} \\ &= \frac{\lim_n \sqrt[n]{2^n}}{\lim_n \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{n}} = 2. \end{aligned}$$

Tem-se $\lambda = 2 > 1$. Logo, a série é divergente.

(b) Considere a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Observa-se que

$$a_n = \frac{n!}{n^n} > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aplicando o critério da razão, obtém-se

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \frac{n^n}{n!} \\ &= \lim_n \frac{(n+1)n!}{(n+1)^n(n+1)} \frac{n^n}{n!} \\ &= \lim_n \frac{n^n}{(n+1)^n} \\ &= \frac{1}{\lim_n \frac{(n+1)^n}{n^n}} \\ &= \frac{1}{\lim_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \\ &= \frac{1}{\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

Ou seja, $\lambda = 1/e < 1$ e portanto a série é convergente. Observe que a obtenção do mesmo resultado pelo o critério da raiz não parece uma tarefa simples.